

## Exercice national 1 : Essuie-glaces

Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

On se propose de calculer l'aire de la surface essuyée par plusieurs modèles de balais d'essuie-glace d'un véhicule. On considèrera que les pare-brises sont des surfaces planes.

1. Un premier véhicule est équipé d'un seul balai porté par une tige métallique de 60 cm, modélisée par un segment  $[OB]$ . Soit  $A$  le point de  $[OB]$  tel que  $OA = 15\text{ cm}$ . Le balai en caoutchouc est alors modélisé par le segment  $[AB]$  (voir figure 1 ci-dessous). Déterminer la valeur exacte de l'aire de la surface essuyée par le balai, en admettant que celui-ci décrit autour du point  $O$  un angle de 180 degrés. En donner une valeur arrondie au  $\text{cm}^2$  près

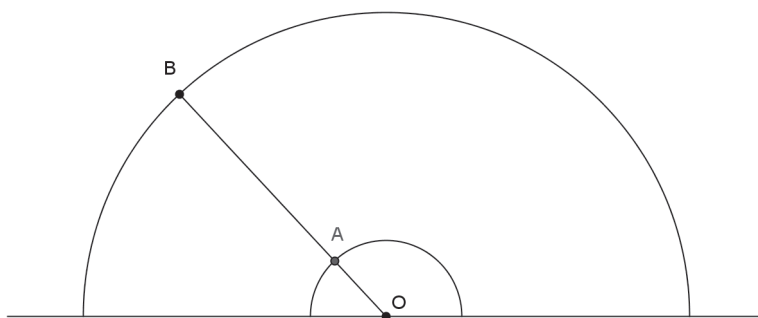


Fig. 1

2. Le pare-brise d'un second véhicule possède deux essuie-glaces modélisés par deux segments  $[OB]$  et  $[O'B']$  de même longueur  $R$ , l'un tournant l'un autour d'un point  $O$ , l'autre autour d'un point  $O'$ , tels que  $OO' = R$  (voir figure 2 ci-dessous). Ces balais en caoutchouc couvrent la longueur totale de chaque segment. L'extrémité de chaque segment décrit un demi-cercle au-dessus de la droite  $(OO')$ . Déterminer l'aire de la surface du pare-brise essuyée par les balais.

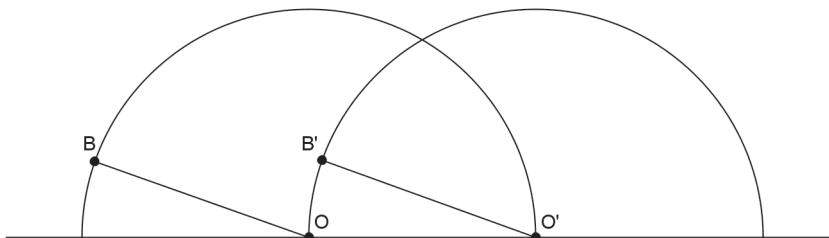


Fig 2

3. Un troisième véhicule est équipé d'un essuie-glace dont le support métallique est modélisé par la réunion de deux segments (voir la figure 3 ci-dessous) : un segment  $[AB]$ , qui porte le balai en caoutchouc sur toute sa longueur, et un segment  $[OC]$  qui relie le centre de rotation  $O$  à un point  $C$  du segment  $[AB]$  tels que  $\widehat{OCA} = 30^\circ$ ,  $CB = 4CA$  et  $OC = \sqrt{3}CA$ . On pose  $CA = a$ .

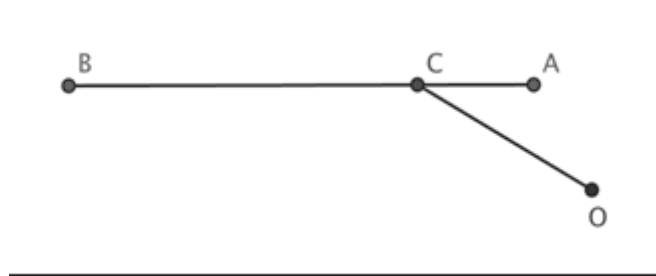


Fig. 3

- (a) Démontrer que le triangle  $AOC$  est isocèle.
- (b) Lorsqu'il essuie le pare-brise du véhicule, l'essuie-glace tourne autour du point  $O$ . En début de course le balai en caoutchouc est en position horizontale : les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  coïncident respectivement avec les points  $M$ ,  $N$  et  $P$  du pare-brise tels que  $[MN]$  est horizontal (voir la figure 4 ci-dessous). En fin de course  $A$ ,  $B$ ,  $C$  coïncident respectivement avec les points  $M'$ ,  $N'$  et  $P'$  du pare-brise tels que le segment  $[OM']$  est horizontal.

Déterminer l'angle dont a tourné le dispositif autour du point  $O$  pour passer d'une position à l'autre, puis exprimer en fonction de  $a$  l'aire de la surface essuyée par le balai.

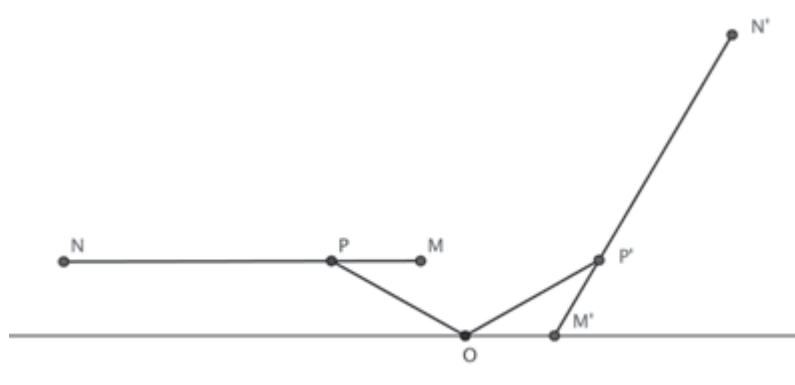


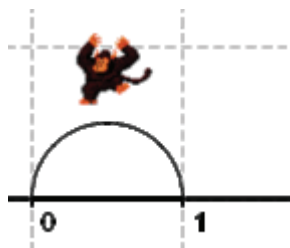
Fig. 4

## Exercice national 2 : Le singe sauteur

J'ai un petit singe sauteur qui passe son temps à faire des bonds sur une demi-droite graduée en choisissant d'aller vers l'avant ou vers l'arrière.

Le nombre  $n$  est dit **atteignable** si le singe peut, en partant de l'**origine** (position d'abscisse 0), atteindre la position d'abscisse  $n$  en **exactement**  $n$  bonds successifs (en avant ou en arrière) de longueurs 1, 2,  $\dots$ ,  $n$  (**effectués** dans cet ordre) et sans **jamais** sortir du segment  $[0; n]$ .

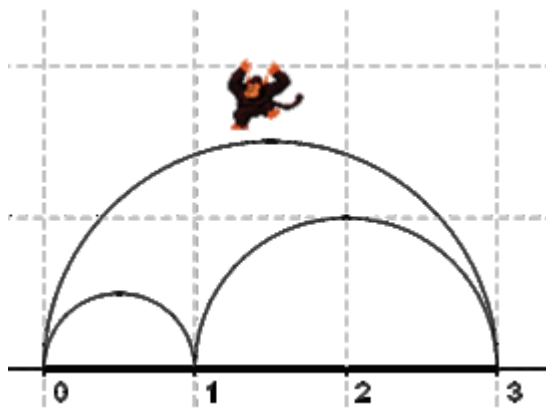
*Par exemple* : Le nombre 1 est atteignable en un bond.



Mais le nombre 2 ne l'est pas car, après avoir fait le bond de longueur 1 (qu'il est obligé de faire vers l'avant), s'il fait un bond de longueur 2 en avant ou en arrière il sort de l'intervalle  $[0; 2]$ .



Le nombre 3 n'est pas atteignable pour une autre raison : après avoir fait un bond de longueur 1 et un autre de longueur 2 vers l'avant, il est obligé de faire un bond de longueur 3 vers l'arrière (sinon il sort de l'intervalle  $[0; 3]$ ) et se trouve sur le nombre 0 au lieu de 3.



## Questions

1. Montrer que le nombre 4 est atteignable et ceci d'une seule façon.
2. Montrer que le nombre 5 n'est pas atteignable. On peut montrer de la même façon que les nombres 6, 7 et 8 ne sont pas atteignables ; ce résultat est admis.
3. Le nombre 9 est-il atteignable ?

Pour la suite, on rappelle que, pour tout nombre entier  $m$ , on a :  $1 + 2 + 3 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$

4. Montrer que tous les nombres entiers qui sont des carrés sont atteignables.
5. (a) Montrer que si le nombre entier  $n$  est atteignable alors le produit  $n(n-1)$  est divisible par 4. En déduire une condition sur l'entier  $n$  pour qu'il soit atteignable.  
(b) La réciproque de cette proposition est-elle vraie ?
6. On suppose  $N \geq 6$  et atteignable par une séquence qui commence par  $1 + 2 + 3 \dots$ . Montrer que  $N + 4$  est aussi atteignable.