

Olympiades nationales de mathématiques

Académies d'Amiens et de Lille

Mercredi 13 mars 2019 de 8h à 12h10

Pause de 10h à 10h10

Série S

Énoncés de la première partie de 8h00 à 10h00

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune. **Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.** Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« deux exercices nationaux »).

Une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie (« deux exercices académiques »). **Les candidats peuvent être libérés lors de la deuxième partie dès qu'ils en expriment le souhait après avoir rendu leur copie.**

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première épreuve

8 heures à 10 heures

Pause de 10 heures à 10 heures 10

Exercice national numéro 1

Triangles à côtés entiers

On dit qu'un triangle est un triangle entier si les longueurs de ses 3 côtés sont des entiers naturels non nuls.

On rappelle la propriété dite de l'« inégalité triangulaire », caractéristique de tout triangle non aplati : la longueur de chacun des côtés est strictement inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

1. *a.* Parmi les triplets (x, y, z) suivants, indiquer lequel représente les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati, puis comment tracer ce triangle et avec quels outils :

$$(4, 4, 5) \quad ; \quad (3, 6, 9) \quad ; \quad (2, 2, 6)$$

b. Quelles sont les valeurs possibles de l'entier z si $(15, 19, z)$ désigne les longueurs des trois côtés d'un triangle entier non aplati rangées par ordre croissant (soit : $z \geq 19$) ?

c. Étant donné trois entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x \leq y \leq z$, pourquoi suffit-il d'ajouter une seule condition (à préciser) pour que le triplet (x, y, z) désigne les longueurs des côtés d'un triangle entier non aplati ?

2. Soit p un entier naturel non nul. On note E_p l'ensemble des triplets d'entiers naturels rangés par ordre croissant $x \leq y \leq z$ et désignant les côtés d'un triangle entier non aplati dont le périmètre est égal à p .

Ainsi obtiendrait-on $E_9 = \{(1, 4, 4), (2, 3, 4), (3, 3, 3)\}$.

a. Si le triplet (x, y, z) appartient à E_{18} , quelles sont les valeurs maximale et minimale pour z ?

b. Donner la composition de E_{18} et représenter dans un repère orthonormé l'ensemble points de coordonnées (x, y) pour lesquels il existe un entier naturel z tel que $(x, y, z) \in E_{18}$. Vérifier que ces points se situent à l'intérieur ou sur les bords d'un triangle dont les sommets ont des coordonnées entières.

3. *a.* Justifier que si $(x, y, z) \in E_p$ alors $(x + 1, y + 1, z + 1) \in E_{p+3}$.

b. Soit $(x, y, z) \in E_{p+3}$. Déterminer une condition sur x, y et z pour que $(x - 1, y - 1, z - 1) \in E_p$.

c. En déduire que si p est impair alors E_p et E_{p+3} ont le même nombre d'éléments.

4. Étude de $E_{2\,019}$.

a. $E_{2\,019}$ contient-il un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle équilatéral ?

b. $E_{2\,019}$ contient-il des triplets (x, y, z) correspondant à des triangles isocèles non équilatéraux ? Si oui combien ?

c. Montrer que si $E_{2\,019}$ contient un triplet (x, y, z) correspondant à un triangle rectangle alors

$$2\,019^2 = 4\,038(x + y) - 2xy.$$

En déduire que $E_{2\,019}$ ne contient pas de triangle rectangle.

5. Dans cette question on se propose de dénombrer $E_{2\,019}$.

a. Soit $(x, y, z) \in E_{2\,022}$. On rappelle que $x \leq y \leq z$. Établir que $x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$.

b. Réciproquement, montrer que si $x \leq y, x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ alors

$$(x, y, 2\,022 - x - y) \in E_{2\,022}.$$

c. Pourquoi, dans un repère orthonormé, l'ensemble des points à coordonnées entières positives (x, y) telles que $x \leq y, x + y \geq 1\,012$ et $x + 2y \leq 2\,022$ constitue-t-il l'ensemble des points à coordonnées entières d'un triangle qui est rectangle ? En déterminer l'aire \mathcal{A} ainsi que le nombre de points à coordonnées entières situés sur ses côtés.

d. On admet le théorème de Pick : « Si un polygone P est tel que tous ses sommets sont à coordonnées entières dans un repère orthonormé alors son aire \mathcal{A} est donnée par la formule $\mathcal{A} = i + \frac{j}{2} - 1$ où i désigne le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de P et j le nombre de ceux situés sur les côtés de P . »

En déduire le nombre de triplets de $E_{2\,022}$ puis celui de $E_{2\,019}$.

6. Une solution algorithmique.

De manière générale, concevoir un programme (à retranscrire sur la copie) permettant d'énumérer et de dénombrer E_p . Le tester sur E_{18} et sur $E_{2\,019}$.

Exercice national numéro 2

Premières fois

On note \mathbb{N} l'ensemble des entiers naturels. Un nombre premier est un entier naturel qui a exactement 2 diviseurs entiers naturels distincts : 1 et lui-même. Par exemple : 2, 3 et 5 sont premiers alors que 0, 1 et 6 ne le sont pas. On rappelle le théorème de décomposition en produit de facteurs premiers :

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe un unique entier naturel k , une unique liste de nombres premiers distincts rangés dans l'ordre croissant $(p_1, p_2, p_3, \dots, p_k)$ et une unique liste d'entiers naturels non nuls $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

On écrit, par exemple, $72 = 2^3 \times 3^2$ (ici $k = 2$), ou $32 = 2^5$ (dans ce dernier exemple, $k = 1$). La décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre premier p s'écrit simplement $p = p^1$.

Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels

On souhaite si possible déterminer une fonction $\Delta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ possédant les propriétés suivantes :

Propriété (1) : $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$;

Propriété (2) : Pour tout nombre premier p , $\Delta(p) = 1$;

Propriété (3) : Pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b)$.

On suppose en questions 1, 2 et 3 qu'une telle fonction Δ existe.

1. Soit p un nombre premier. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^2)$? $\Delta(p^3)$? Un entier naturel n étant donné, quelle est l'image par Δ de p^n ?

2. a. Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. Les propriétés précédentes permettent-elles d'exprimer $\Delta(p^m \times q^n)$?

b. Le nombre $\Delta(10^n)$ est-il un multiple de 7 pour $n \geq 1$?

3. À tout nombre entier $n \geq 2$, dont la décomposition en produit de facteurs premiers s'écrit :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$$

on associe les quotients q_1 de n par p_1 , q_2 de n par p_2, \dots , q_k quotient de n par p_k . Montrer qu'alors :

$$\Delta(n) = \alpha_1 \times q_1 + \alpha_2 \times q_2 + \alpha_3 \times q_3 + \dots + \alpha_k \times q_k$$

4. Vérifier que l'expression ainsi obtenue satisfait les propriétés (2) et (3) ci-dessus. Cette expression, alliée à la convention portée dans la propriété (1), définit donc une unique fonction Δ convenable.

Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ .

5. a. Calculer $\Delta(12)$, $\Delta(56)$, $\Delta(1\ 001)$.

b. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 0$?

c. Quelles sont les solutions de l'équation $\Delta(x) = 1$?

d. Tout entier naturel m a-t-il au moins un antécédent par Δ ?

e. Est-il vrai que, pour tout entier naturel n , $\Delta(n) \leq n$?

6. a. Montrer que si p et q sont des nombres premiers alors $\Delta(p \times q) = p + q$.

b. Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a \times b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?

7. a. Est-il vrai que pour tous entiers naturels a et b : $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$?

b. Soient a et b deux entiers naturels tels que $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ et un entier naturel quelconque k . Montrer que : $\Delta(ka + kb) = \Delta(ka) + \Delta(kb)$.

Les points fixes de la fonction Δ

8. a. Soit p un nombre premier. Soit m un entier naturel. On suppose que m est un multiple de p^p . Montrer que dans ce cas, $\Delta(m)$ est aussi un multiple de p^p .

b. Soit n un entier naturel et p un nombre premier. Soit α l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n . On suppose que $\alpha \geq 1$. Montrer que si $\alpha < p$, alors $\alpha - 1$ est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $\Delta(n)$.

9. Résoudre l'équation $\Delta(x) = x$.