Deuxième épreuve

10 heures 10 à 12 heures 10

Exercice académique numéro 1

Des nombres renversants !

Sophie s'amuse souvent avec les nombres entiers naturels ; elle joue ainsi à les « renverser ».
Le ***renversé*** d'un entier naturel est l'entier naturel formé avec les mêmes chiffres mais écrit dans le sens contraire.

Exemple : 123 est le renversé de 321. (Remarque : si un nombre est égal à son renversé, on dit qu'il est *palindrome*.)

1. Sophie a constaté que 32 et 56 ont la même somme que leurs renversés, 23 et 65. Elle remarque que 32 et 56 ont la caractéristique suivante : la somme des chiffres des dizaines, 3 et 5, est égale à la somme des chiffres des unités 2 et 6.

   a) Donner un autre couple de nombres à deux chiffres ayant cette caractéristique sur les dizaines et les unités. Leur somme est-elle égale à celle de leurs renversés ?

   b) Sophie conjecture la proposition suivante, appelée P_1 :
   « La somme de deux nombres entiers à deux chiffres n_1 et n_2, non multiples de 10, est égale à la somme de leurs renversés*, si, et seulement si*, la somme des chiffres de leurs dizaines est égale à la somme des chiffres de leurs unités. »
   Elle veut prouver que sa conjecture est vraie.
   Pour cela, elle décompose dans la base 10 chacun des nombres n_1 et n_2 :
   $n_1 = 10d_1 + u_1$ et $n_2 = 10d_2 + u_2$, où d_1 et d_2 sont les chiffres des dizaines respectifs de n_1 et n_2 puis u_1 et u_2 sont les chiffres des unités respectifs de n_1 et n_2.

   Prouver que la somme des nombres n_1 et n_2 est égale à la somme des renversés de n_1 et n_2 si, et seulement si, $d_1 + d_2 = u_1 + u_2$.

2. Sophie s'intéresse aussi aux nombres renversés à trois chiffres. Après plusieurs essais sur la somme de deux nombres à trois chiffres et celle de leurs renversés, elle conjecture la proposition suivante, appelée P_2 : « La somme de deux nombres entiers à trois chiffres n_1 et n_2 (non multiples de 10) est égale à la somme de leurs renversés*, si, et seulement si*, la somme des chiffres de leurs centaines est égale à la somme des chiffres de leurs unités. »

   a) Donner un couple de deux nombres entiers à trois chiffres qui vérifie cette propriété.

   b) Par une démarche analogue à celle proposée à la question 1b) ci-dessus, démontrer la proposition P_2.
   Indication : On pourra noter c le chiffre des centaines d'un nombre à trois chiffres, d le chiffre des dizaines, u le chiffre des unités…

3. Sophie veut généraliser les propriétés P_1 et P_2 aux nombres entiers à quatre chiffres. Elle énonce la proposition suivante :
   « La somme de deux nombres entiers à quatre chiffres n_1 et n_2 (non multiples de 10) est égale à la somme de leurs renversés si la somme des chiffres des milliers est égale à la somme des chiffres de leurs unités. »

   a) La somme des nombres $3\,024$ et $2\,651$ est-elle égale à la somme de leurs renversés ? La proposition de Sophie est-elle vraie ? Que constate-t-on sur la somme de ces deux nombres et celles de leurs renversés ?

   b) Compléter les cases par des entiers naturels **distincts** dans les nombres à quatre chiffres ci-dessous pour que leur somme soit égale à celle de leurs renversés : 3 ☐☐ 4 et 2 ☐☐ 1 .

   c) Que doit ajouter Ada comme hypothèse dans l'écriture de sa proposition pour qu'elle soit vraie pour des nombres à quatre chiffres, avec un chiffre des centaines, distinct de celui des dizaines ?

4. Qu'en est-il pour les nombres entiers à cinq chiffres (non multiples de 10)? Enoncer une conjecture, la plus précise possible.

5. Sophie envoie par mail l'énigme suivante à son ami anglais Alan :
   « I'm an odd number between 54 and 90. If I'm added to my inverted number, then this sum is an even number between 54 and 90. Who am I ?" *
   Quel est le nombre que doit trouver Alan?

   *Traduction: « Je suis un nombre impair situé entre 54 et 90. Si on m'ajoute à mon renversé, on obtient un nombre pair situé entre 54 et 90. Qui suis-je ? »

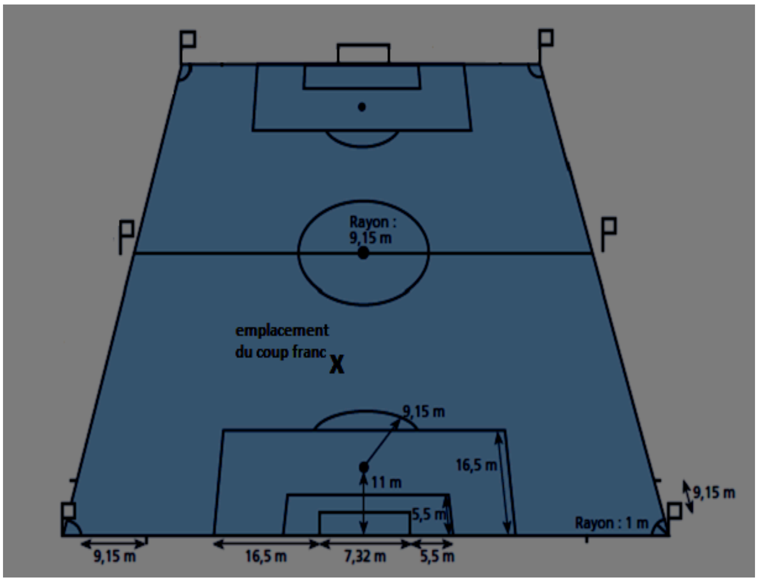
Exercice académique numéro 2
Le coup franc de la victoire

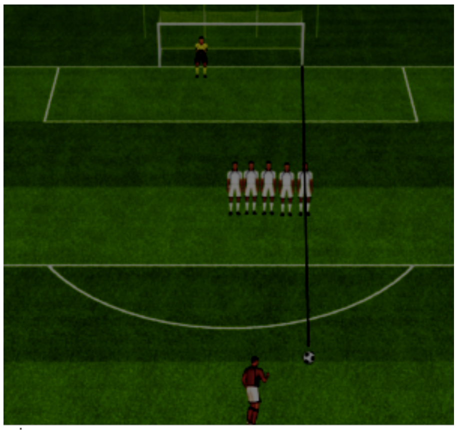
Avant la finale de la coupe du monde, Antoine Griezmann s'était entraîné à tirer des coups francs directs. Il cherchait à déterminer, en fonction de la distance du but à laquelle il se trouvait, un moyen d'envoyer le ballon se loger dans la lucarne (l'un des deux coins hauts du but) du gardien adverse.

On suppose que la trajectoire d'un coup franc direct est décrite par une parabole du plan. On néglige toute force extérieure pouvant modifier la trajectoire du ballon (frottements de la pelouse sur le ballon, vent, etc.). **On prendra pour origine du repère l'endroit où est placé le ballon pour le coup franc**.

On rappelle les dimensions suivantes (voir figure de gauche) pour un terrain de football :

- le but mesure **2,44 mètres de haut** pour **7,32 mètres de long** ;
- la surface de réparation mesure **16,50 mètres de large** ;
- pour tirer un coup franc, le gardien adverse peut placer son mur de joueurs à 9,15 mètres de l'endroit où l'arbitre a donné la faute, et où est placé le ballon. Afin de simplifier les calculs, **nous considérons que le mur est placé à 9,50 mètres du ballon**.





1. L'arbitre accorde un coup franc à l'équipe d'Antoine Griezmann, situé à 26 mètres de la ligne de but du gardien (voir figures ci-dessus). Afin de mettre le ballon hors de portée du gardien, Antoine Griezmann décide d'envoyer le ballon en face de lui, à une hauteur de 2 mètres. Il devra cependant faire passer son ballon au-dessus du mur de joueurs, d'une taille de 1,85 mètre. Nous supposerons dans un premier temps que le mur reste immobile au sol.
   Déterminer <u>une</u> fonction f permettant de réaliser un tel coup franc.

2. À l'aide de votre fonction précédemment trouvée, déterminer à quelle distance de l'endroit où a été posé le ballon la fonction atteindra son maximum. Quelle est la valeur de ce maximum ?

3. On suppose maintenant, en plus des hypothèses de la question **1.**, que **le mur saute verticalement d'une hauteur de 35 cm** afin de gêner Antoine Griezmann, et que la trajectoire du ballon qu'il envoie atteint son maximum en x=17 mètres.
   Dans ces conditions, est-il possible de déterminer une fonction g permettant à Antoine Griezmann de marquer un but ?
   Si oui, la déterminer.

4. On souhaite écrire un algorithme permettant de savoir si la fonction choisie permet de marquer un but ou non.
   Compléter les deuxièmes lignes de chaque condition dans l'algorithme ci-contre afin qu'il permette de répondre au problème.

```
Saisir a,b,c
Si x==9,5
   si a*x^2+b*x+c ......
   alors renvoyer VRAI
   sinon
   renvoyer FAUX
   FinSi
FinSi
Si x==26
   si ...........................
   alors renvoyer BUT
   sinon
   renvoyer PAS BUT
   FinSi
FinSi
```