Deuxième épreuve

10 heures 10 à 12 heures 10

Exercice académique numéro 1

Le Jeu des Différences

On considère le jeu suivant, appelé « **Jeu des Différences** », jeu connu dans la littérature sous le nom du ***problème de Ducci*** : sur les sommets d'un premier carré, on place les nombres d'un quadruplet (a, b, c, d) constitué d'entiers positifs : (9, 22, 3, 12) dans l'exemple ci-dessous.

On effectue ensuite une opération appelée **DifférenceCarrée** : pour chaque côté du carré, on calcule la différence positive ou écart entre les deux nombres a et b situés aux deux extrémités du côté considéré (c'est-à-dire a-b ou b-a selon les cas).

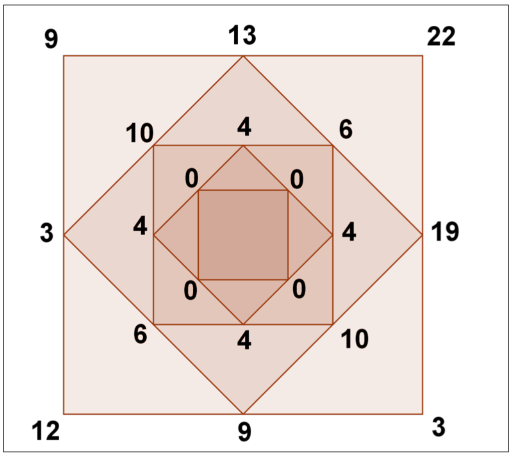
On réitère cette opération un certain nombre de fois et on dira que le jeu s'arrête si on obtient le "carré nul", ce qui signifie que les quatre entiers inscrits aux sommets de ce carré sont tous nuls.

Si le jeu s'arrête, on note N(a, b, c, d) le nombre de **DifférenceCarrée** nécessaire pour arriver au quadruplet (0, 0, 0, 0). Dans l'exemple ci-dessous, on a N(9, 22, 3, 12)=4.

On pose par convention que N(0, 0, 0, 0)=0.

On note également M=Max(a, b, c, d) le plus grand des quatre nombres a, b, c, d.

Cette notation servira pour la suite du sujet.



La suite de carrés dessinés ci-contre peut être décrite par le tableau suivant :

Quadruplet				Nombre de **DifférenceCarrée**	M
9	22	3	12	0	22
13	19	9	3	1	19
6	10	6	10	2	10
4	4	4	4	3	4
0	0	0	0	4	0

Notion importante pour la suite :

Pour tout nombre réel x, on appelle VALEUR ABSOLUE de x le nombre réel, noté |x| ou noté abs(x) dans un programme TI ou Casio, égal à x si x≥0, et égal à -x sinon.

Exemple, |3|=3 et |-5|=5 ou abs(3)=3 et abs(-5)=5.

Saisie sur la calculatrice:pour saisir la fonction VALEUR ABSOLUE, on procède de la manière suivante :

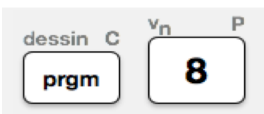
Calculatrice TI82 ou 83

Calculatrice Casio

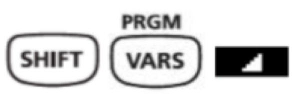
Instruction importante pour la suite : Pour avoir le temps de relever des résultats lors du déroulement d'un programme, on peut y introduire une PAUSE.

Saisie sur la calculatrice: Pour insérer une PAUSE dans un programme, on procède de la manière suivante:

Calculatrice TI82 ou TI83



Calculatrice Casio



Après lecture des résultats, on relance le programme en tapant 

Partie A : Étude d'un algorithme

On considère l'algorithme ci-contre :

A1) Si la condition a+b+c+d=0 est réalisée, que se passe-t-il au niveau de l'algorithme ?

A2) Interpréter la ligne 10. Quel est le rôle de la variable e ?

A3) Interpréter les lignes 8 et 15.

A4) Déduire de ce qui précède le rôle de cet algorithme.

A5) Déterminer N(7, 5, 3, 11) puis N(230, 193, 125, 0).

```
1.  Variables
2.  a, b, c, d, e, N entiers positifs
3.  Début
4.  Demander la valeur de  a
5.  Demander la valeur de  b
6.  Demander la valeur de  c
7.  Demander la valeur de  d
8.  Initialiser N à 0
9.  Tant que a+b+c+d≠0
10.     Stocker a dans e
11.     Stocker abs(a-b) dans a
12.     Stocker abs(b-c) dans b
13.     Stocker abs(c-d) dans c
14.     Stocker abs(d-e) dans d
15.     Stocker N+1 dans N
16.     Afficher a, b, c, d, N
        (Penser à insérer une Pause en
        tapant le programme)
17 .  Fin Tant Que
18.  Fin
```

Partie B : DifférenceTriangle appliquée à un triplet d'entiers positifs

B1) Avec les mêmes règles de calculs, appliquer le « Jeu des Différences » au triplet (1, 0, 1).

B2) Que peut-on déduire de ce qui précède?

Remarque: Dans les trois parties qui suivent (Parties C, D et E), on s'intéresse à nouveau au « Jeu des Différences »pour des quadruplets, l'objectif étant de démontrer que le jeu s'arrête toujours, quel que soit le quadruplet de départ.

Partie C : Quelques résultats

C1) Soit (a, b, c, d) un quadruplet d'entiers positifs, et (a', b', c', d') le nouveau quadruplet d'entiers obtenu par calculs après une **DifférenceCarrée** dans le « Jeu des Différences ». Justifier l'inégalité :

$$M = \mathrm{Max}(a, b, c, d) \geq M' = \mathrm{Max}(a', b', c', d').$$

C2) Montrer que, pour tout quadruplet d'entiers positifs (a, b, c, d) :

$$N\,(2a, 2b, 2c, 2d) = N\,(a, b, c, d).$$

C3a) Justifier que N (b, c, d, a) = N (a, b, c, d), puis que N (d, c, b, a) = N (a, b, c, d).

C3b) En s'appuyant sur les égalités de la question précédente, lister tous les quadruplets d'entiers positifs utilisant une et une seule fois chacun des quatre entiers a, b, c et d, débouchant sur la même valeur N (a, b, c, d).

Partie D : Jeu simplifié

Règle du jeu simplifié : On remplace chacun des entiers a, b, c, d par le symbole p s'il est pair, et par le symbole i s'il est impair.

Le jeu simplifié s'arrête si, à une étape donnée, on obtient le quadruplet (p, p, p, p).

Vocabulaire :
Un nombre pair a est un entier multiple de 2 c'est à dire qu'il existe un entier k éventuellement nul tel que a = 2k.

Un nombre impair a est un entier non multiple de 2 c'est à dire qu'il existe un entier k tel que

a = 2k + 1.

D1a) Démontrer que la différence entre deux entiers pairs, ou deux entiers impairs, est paire.

D1b) Démontrer que la différence entre un entier pair et un entier impair est impaire.

D2a) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en appliquant, au quadruplet (6, 8, 2, 5), dans la colonne de gauche le « Jeu des Différences » et dans la colonne de droite le jeu simplifié.

Le jeu simplifié peut s'arrêter sans que le « Jeu des Différences » s'arrête.

« Jeu des Différences »						Jeu simplifié			
Quadruplet				Nombre de **DifférenceCarrée**	M	Quadruplet			
6	8	2	5	0	8	p	p	p	i
2	6	3	1	1	6	p	p	i	i
…									

D2b) Justifier la règle du jeu simplifié concernant l'arrêt de ce jeu.

D3a) Justifier que tous les quadruplets de départ possibles du jeu simplifié se ramènent à l'un des six quadruplets suivants (p, p, p, p), (p, p, p, i), (p, i, p, i), (p, p, i, i), (p, i, i, i) ou (i, i, i, i).

D3b) En appliquant le jeu simplifié aux six quadruplets précédents, déterminer le nombre maximal d'étapes du jeu simplifié.

D4a) On s'intéresse à nouveau à la recherche de N(230, 193, 125, 0) en s'imposant obligatoirement, d'effectuer une division par 2 de tous les entiers d'un quadruplet, chaque fois que cela est possible. Cette division par 2, n'affecte pas le nombre de **DifférenceCarrée**, mais relance un nouveau jeu simplifié.
Reproduire et terminer sur votre copie le tableau suivant :

« Jeu des Différences »				Nombre de **DifférenceCarrée**	M	Jeu simplifié			
230	193	125	0	0	230	p	i	i	p
37	68	125	230	1	230	i	p	i	p
31	57	105	193	2	193	i	i	i	i
…									

D4b) Combien de jeux simplifiés a-t-on été amené à effectuer au cours de la détermination de N(230, 193, 125, 0) ?

Partie E : Retour au « Jeu des Différences »

E1) Justifier, qu'en partant du quadruplet (a, b, c, d), au bout de quatre **DifférenceCarrée** maximum, on aboutit à un quadruplet du type ($2a_1$, $2b_1$, $2c_1$, $2d_1$) avec a_1, b_1, c_1 et d_1 entiers.

E2) Justifier qu'en quatre **DifférenceCarrée** maximum, on aboutit à $M_1 \leq \frac{M_0}{2}$ avec $M_0 = \max$ (a, b, c, d) et $M_1 = \max$ (a_1, b_1, c_1, d_1).

On admet que, pour tout entier N positif, il existe un entier n tel que $2^{n-1} < N \leq 2^n$.

E3) Déterminer la valeur de n lorsque N = 47, puis N = 512 et N= 10^9 .

E4) On note k l'entier vérifiant $2^{k-1} < M_0 \leq 2^k$.

Justifier que : $M_1 \leq 2^{k-1}$.

E5) Justifier qu'après 4(k+1) **DifférenceCarrée** au maximum, le « **Jeu des Différences** » s'arrête obligatoirement.

Exercice académique numéro 2

Les décimales qui bouclent …

LES FRACTIONS UNITAIRES

* On appelle **fraction unitaire**, toute fraction dont le numérateur est *1* et dont le dénominateur est un entier positif non nul. Elle s'écrit sous la forme du quotient $\frac{1}{n}$ où n est un entier naturel non nul.

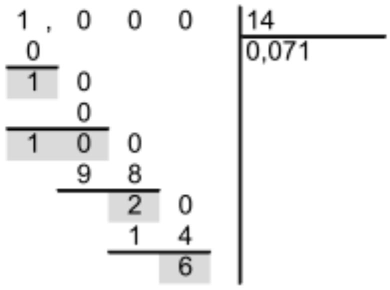
* Le **développement décimal** du quotient $\frac{1}{n}$ avec n entier naturel non nul, est de la forme **0,abcd…** dans lequel abcd… est une succession de chiffres appelée **partie décimale** de ce quotient.
Cette partie décimale peut être **finie** ($\frac{1}{4}$ =*0,25*) ou **infinie** ($\frac{1}{3}$ =*0.333333…*).

* Ces deux écritures (quotient et développement décimal) se généralisent pour toute fraction non unitaire de la forme $\frac{m}{n}$ où m et n sont des entiers naturels et n non nul.

* Lorsque la partie décimale d'une fraction présente **une partie répétitive**, on nommera **boucle** le premier bloc de chiffres qui se répète dans la partie décimale. Pour signifier sa répétition infinie, cette boucle sera notée une seule fois en l'encadrant. *Exemple :* $\frac{1}{44}$ =*0,02272727…*sera noté $0,02\boxed{27}$.

Partie 1 : Observations

1) On a détaillé les quatre premières étapes de la division de *1* par *14* :



On poursuivra ainsi jusqu'à l'étape 10 mais en ne présentant sur la copie que l'étape qui donne 10 décimales au quotient, en ayant pris le soin d'entourer les restes successifs (c'est-à-dire *1*, puis *10*, puis *2*, puis *6*, puis …)

2) Poser sous la même forme les divisions de *1* par *11* puis de *1* par *40*.

3) Que remarque-t-on quant aux parties décimales des quotients obtenus ?

Partie 2 : Démarche d'investigation

Ces fractions unitaires déclenchent inévitablement quelques interrogations

Interrogation A : Quelles sont les fractions unitaires qui ont des parties décimales finies?

Interrogation B : Les fractions unitaires qui ont une partie décimale infinie ont-elles toutes une boucle dans leur partie décimale ?

Interrogation C : La boucle du quotient $\frac{1}{n}$, lorsqu'elle existe, a-t-elle une longueur proportionnelle au dénominateur n du quotient correspondant ?

Interrogation D : La boucle du quotient $\frac{1}{n}$ a-t-elle une longueur inférieure, égale ou supérieure à n ?

Interrogation E : Quelles sont les fractions, unitaires ou non, qui ont une boucle à un seul chiffre dans leur partie décimale ?

Interrogation F : Si $n > p$, le quotient $\frac{1}{n}$ a-t-il une boucle plus longue que le quotient $\frac{1}{p}$?

Il vous est demandé de répondre aux questions qui suivent. A l'issue des questions 1), 2) et 3), vous regarderez si les réponses obtenues permettent ou non de répondre à l'une ou l'autre des interrogations numérotées de A à F et vous expliquerez pourquoi, le cas échéant.

1) Donner le développement décimal de chacun des quotients suivants : $\frac{1}{7}; \frac{1}{8}; \frac{1}{9}; \frac{1}{37}$. On pensera à utiliser la notation avec l'encadré si nécessaire.

2) Justifier que, si n peut s'écrire sous la forme $2^k * 5^p$, avec k et p entiers positifs, alors la partie décimale de $\frac{1}{n}$ est finie.
On admet que la réciproque de cette propriété est vraie également.

3) a) Expliquer pourquoi une fraction du type $\frac{1}{n}$, dont le dénominateur ne s'écrit pas $2^k * 5^p$ avec k et p entiers positifs a toujours une boucle dans sa partie décimale.

   b) Que peut-on dire de la longueur de cette boucle ?

4) Répondre aux interrogations A à F auxquelles les questions 1) à 3)b) n'auraient pas répondu.
(Toute recherche, fructueuse ou non, est à faire apparaître sur la copie afin d'être évaluée).

Partie 3 : Elargissons notre point de vue

Considérons une fraction F qui ne nous est pas connue mais dont on nous donne le développement décimal présentant une boucle à k chiffres. On va prouver dans un premier temps qu'il est alors possible de retrouver une écriture fractionnaire de *F*.
Puis se servir de ce résultat concernant les parties décimales pour justifier une propriété étonnante dans le domaine des nombres premiers.

1) Justifier que $10^k F - F$ possède une partie décimale finie.

2) Justifier que F peut s'écrire sous la forme d'un quotient d'entiers, avec un dénominateur exclusivement constitué de un ou plusieurs *9* suivis éventuellement de un ou plusieurs *0*.

3) Ce résultat est-il valable pour les fractions unitaires ?

4) Changeons de domaine : Exploiter les résultats précédents pour justifier que tous les nombres premiers sauf *2* et *5* ont un multiple qui ne s'écrit qu'avec des *9*.