MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades nationales de mathématiques

Académie de Lille

Mercredi 14 mars

(Sujet pour les élèves de la série S)

Les Olympiades nationales de Mathématiques se déroulent en deux épreuves indépendantes de deux heures chacune. **Les énoncés des deux épreuves sont donc séparés et distribués à des moments différents**.

- La première épreuve consacrée aux sujets nationaux est traitée individuellement par chaque élève.
- La seconde épreuve consacrée aux sujets académiques est traitée en binôme constitué lors de l'inscription des candidats.

A l'issue de chacune des épreuves, les copies rédigées sont ramassées :

- pour la première épreuve, une copie pour chaque candidat participant ;
- pour la seconde épreuve, un copie par binôme constitué participant.

Une pause de dix minutes est prévue entre chaque épreuve. Les candidats ne sont pas autorisés à quitter les locaux durant la totalité des deux épreuves.

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus

au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Première épreuve

8 heures à 10 heures

Pause de 10 heures à 10 heures 10

Exercice national numéro 1
(à traiter par tous les candidats)
Géométrie de l'à-peu-près

Mesures d'angles à peu près

On dit qu'un triangle ABC est à peu près rectangle en un sommet A si la mesure de l'angle en A est dans l'intervalle $[75°, 105°]$. On dit qu'un triangle ABC est à peu près isocèle en un sommet A si les mesures des angles en B et en C diffèrent de $15°$ au maximum.

1. *a.* Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle ? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle ?
b. Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets ? À peu près rectangle en deux sommets ? Le cas échéant, quand il est en plus acutangle (c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus), est-il à peu près isocèle ?

2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle ?

3. Écrire un programme (en langage naturel ou calculatrice), à recopier sur votre copie, testant si un triangle ABC dont on connaît les trois angles en A, B et C est à peu près isocèle.

Mesures de longueurs à peu près

Dans cette partie, on suppose qu'une unité de longueur a été donnée dans le plan, et on adopte les définitions suivantes :
- Deux points sont à peu près égaux si leur distance est inférieure ou égale à 0,1 ;
- Deux segments sont à peu près de même longueur si leurs longueurs diffèrent de 0,1 ou moins ;
- Un triangle est à peu près équilatéral si les longueurs de ses côtés diffèrent, deux à deux, de 0,1 ou moins.

4. *a.* Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure (exactement) 1 peut-il être à peu près équilatéral ?
b. Un triangle rectangle peut-il être à peu près équilatéral ?

5. On considère un cercle, de centre O de rayon (exactement) 2 et deux points de ce cercle : A, fixe, et B, mobile. On appelle I le milieu du segment $[OA]$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).
a. Représenter sur une figure l'ensemble des points B pour lesquels H et I sont à peu près égaux. En calculer la longueur (le résultat sera donné arrondi au centième).
b. Si H et I sont à peu près égaux, le triangle AOB est-il à peu près équilatéral ?

Une statistique sur la population des triangles

On convient de caractériser tout triangle ABC par les mesures x et y de ses angles en A et B. Chaque triangle (et avec lui ceux qui ont les mêmes angles, qui lui sont donc semblables) est représenté par le point de coordonnées (x, y) dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On choisit de représenter la mesure $10°$ par 1 cm.

6. Figurer sur un schéma (accompagné d'une légende explicite) :
a. Le domaine $\mathcal{T}$ constitué des points représentant tous les triangles ;
b. Le point E représentant les triangles équilatéraux ;
c. L'ensemble des points représentant les triangles rectangles.

7. *a.* Quelle partie $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles ?
b. Si on estime la proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles par le rapport de l'aire de $\mathcal{A}$ à l'aire de $\mathcal{T}$, quelle est cette proportion ?

8. Quelle partie $\mathcal{R}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles à peu près rectangles (au sens de la première partie) ? Quelle est leur proportion (dans le même sens que ci-dessus) dans l'ensemble des triangles ?

Exercice national numéro 2

(à traiter par les candidats de la série S)

Ensembles arithmétiques

Un ensemble S de rationnels est un ensemble arithmétique (en abrégé EA) si pour tout couple (a, b) avec a et b appartenant à S, il existe un élément c de S tel que l'un des nombres a, b ou c est la moyenne arithmétique (c'est-à-dire la demi-somme) des deux autres. On souhaite déterminer tous les entiers n strictement positifs pour lesquels il existe un EA ayant n éléments.

1. *a.* Les ensembles suivants sont-ils des EA ? Justifier.

$S_1 = \{0,1,2\}$ $\quad$ $S_2 = \{0,1,2,3\}$ $\quad$ $S_3 = \{0,1,2,4\}$ $\quad$ $S_4 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$

b. Démontrer qu'il n'existe pas d'EA à 2 éléments. Que dire des singletons (ensembles à un seul élément) ?

c. Donner un EA ayant 5 éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

2. *a.* Outre $\frac{a+b}{2}$, quels sont les deux autres rationnels à envisager pour vérifier qu'un couple (a, b) d'éléments de S ne fait pas échec à la définition d'un EA ?

b. On désire écrire un algorithme qui teste si un ensemble est un EA. L'ensemble S est encodé sous la forme d'une liste S = [S[1],..,S[n]] de taille n. Par exemple la moyenne arithmétique du $i$ème et du $j$ème élément de S s'écrit (S[i]+S[j])/2.

```
fonction TesterEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
        Resultat ← Vrai
        Pour i de 1 à n
                Pour j de 1 à n
                [...]
                Fin Pour
        Fin Pour
        Renvoyer(Resultat)
```

On dispose de plus d'une fonction Appartient(r,S) qui renvoie Vrai lorsque le rationnel r appartient à la liste S et Faux sinon. Compléter le squelette de la fonction ci-contre (à recopier sur sa feuille de composition) pour qu'elle renvoie Vrai si et seulement si S =[S[1],..,S[n]] est un ensemble arithmétique de longueur n.

c. Modifier la fonction pour qu'elle réalise moins d'opérations dans le cas général (à recopier sur sa feuille de composition).

3. Soit n un entier strictement supérieur à 2 et S un EA ayant n éléments dont le plus grand est noté M et le plus petit m. Aux éléments a de S, on associe les nombres $\frac{2(a-m)}{M-m}$. On constitue ainsi l'ensemble S'. Démontrer que S' est un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

4. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.
Démontrer que pour tout nombre réel x:

- Si x appartient à S et $0 < x < 1$ alors $\frac{x+2}{2}$ appartient à S ;
- Si x appartient à S et $1 < x < 2$ alors $\frac{x}{2}$ appartient à S.

En déduire qu'il n'existe pas de EA ayant 4 éléments.

5. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.

a. Démontrer que s'il existe un élément a_1 de S tel que $0 < a_1 < \frac{2}{3}$, alors il existe un élément a_2 de S tel que $0 < a_1 < a_2 < \frac{2}{3}$.

En déduire que S ne contient aucun nombre strictement compris entre 0 et $\frac{2}{3}$.

b. Démontrer, de façon analogue, que S ne contient aucun nombre strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et 1.

c. En déduire que $n \leq 5$.

6. Quels sont les entiers n pour lesquels il existe un EA ayant n éléments ?