Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE ET
DE LA JEUNESSE

Région académique
HAUTS-DE-FRANCE

# Olympiades nationales de mathématiques

----------------

## Académies d'Amiens et de Lille

Le mardi 23 mars 2021 de 13h à 17h10

Pause de 15h à 15h10

## Les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

Énoncés de la première partie de 13h00 à 15h00

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes de deux heures chacune.
**Les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents.**

La première partie est constituée des exercices nationaux. À son issue, les copies sont ramassées et une pause de dix minutes est prévue, avant la seconde partie, constituée des exercices académiques.

Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

**Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.**
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

**Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.**

# Première épreuve

De 13 heures à 15 heures

Pause de 15 heures à 15 heures 10

## Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)

### *Nombre de diviseurs, somme des diviseurs d'un entier*

*On rappelle qu'un nombre entier $m$ est un multiple d'un nombre entier $d$ s'il existe un nombre entier $q$ tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que $d$ est un diviseur de $m$. Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier $n$.*

**1.** Quels sont les diviseurs de 6 ? Quels sont les diviseurs de 101 ? Quels sont les diviseurs de 361 ? Quels sont les diviseurs de 2021 ?

**2.** Quelle est la somme des diviseurs de 6? Quelle est la somme des diviseurs de 101 ? Quelle est la somme des diviseurs de 361 ? Quelle est la somme des diviseurs de 2021 ?

À tout nombre entier naturel non nul $n$, on associe le nombre $N\ (n)$ le nombre des diviseurs de $n$ et la somme $S(n)$ de ses diviseurs.

**3.** Pour chacun des nombres 6, 101, 361, 2021 vérifier l'inégalité :

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

**4.** À tout diviseur $d$ d'un entier $n$ non nul on associe l'entier $q$ tel que $n = dq$. Si les diviseurs de $n$ sont $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.

***a.*** Évaluer la somme $T_n = d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_{N(n)-1} + 1$.

***b.*** Si $a$ et $b$ sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que :

$$a + b \leq ab + 1$$

***c.*** En déduire, pour des nombres $d$ et $q$ tels que $dq = n$, l'inégalité :

$$d + q \leq n + 1$$

***d.*** En déduire finalement que l'inégalité :

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

est réalisée pour tout entier naturel $n$ non nul.

**5. *a.*** Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité

$$2Sn = (n+1)N(n) \quad (*)$$

n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs $d$ de $n$, l'égalité

$$d + q = n + 1$$

est réalisée.

***b.*** En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité (*)

***c.*** La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 2 (à traiter par les candidats suivant l'enseignement de spécialité de la voie générale)**
**Entiers $N$– décomposables**

On donne un entier $N$ supérieur ou égal à 1.
On dit qu'un entier naturel $k$ est $N$–décomposable s'il existe des entiers naturels $q$ et $r$ tels que :

$$(S)\begin{cases} k = q + r \\ k^2 = qN + r \end{cases}$$

Par exemple, le nombre 5 est 21–décomposable, puisque $\begin{cases} 5 = 1 + 4 \\ 5^2 = 1\times 21 + 4 \end{cases}$, le nombre 28 est 64–décomposable, puisque $\begin{cases} 28 = 12 + 16 \\ 28^2 = 12\times 64 + 16 \end{cases}$.

**A. Quelques exemples**
**1. *a.*** Le nombre 7 est-il 22–décomposable ? Est-il 10–décomposable ?
***b.*** Le nombre 45 est-il 100–décomposable ?

**2. *a.*** Justifier qu'il y a exactement deux nombres 1–décomposables.
***b.*** Justifier qu'il y a exactement trois nombres 2–décomposables.

**3.** Soit $N$ un entier supérieur ou égal à 1.
***a.*** Le nombre $N$ est-il $N$–décomposable ?
***b.*** Prouver que $N - 1$ est $N$–décomposable.
***c.*** Prouver que si $N \geq 4$, alors 2 n'est pas $N$–décomposable.

**B. Une étude des nombres $N$–décomposables**
Soit $N$ un entier supérieur ou égal à 1.
**1. *a.*** Prouver que si $k$ est $N$–décomposable, alors $0 \leq k \leq N$.
***b***. Quels sont les entiers 3–décomposables ? Quels sont les entiers 4–décomposables ?

**2.** Prouver que si $N \geq 2$ et si $k$ est $N$–décomposable, alors il existe un unique couple $q, r$ d'entiers vérifiant le système $(S)$.
**3. *a.*** Soit $k$ un nombre $N$–décomposable. Justifier qu'il existe un entier $q$ compris entre 1 et $k$ tel que $k$ soit solution de l'équation $x^2 - x - q\,(N-1) = 0$.
***b.*** Prouver que, réciproquement, si $k$ est un entier naturel et qu'il existe un entier $q$ compris entre 1 et $k$ tel que $k$ soit solution de l'équation $x^2 - x - q\,(N-1) = 0$, alors $k$ est $N$–décomposable.
***c.*** Soit $p$ un entier supérieur ou égal à 1. Prouver que le nombre $2^{p-1}(2^p - 1)$ est $2^{2p}$–décomposable.

**4.** Prouver que si $k$ est $N$–décomposable, alors $N - k$ est $N$–décomposable.

**5.** Dans cette question, on suppose que $N$ est pair et que $N \geq 4$. Prouver que $\frac{N}{2}$ n'est pas $N$–décomposable.

**6.** Justifier que, pour tout $N \geq 3$, il y a un nombre pair d'entiers $N$–décomposables.

**7.** Dans cette question, on suppose que $N - 1$ est un nombre premier. Déterminer tous les entiers $N$–décomposables.

**8.** On donne un entier $k$ supérieur ou égal à 2. Prouver qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers $N$ tels que $k$ soit $N$–décomposable.

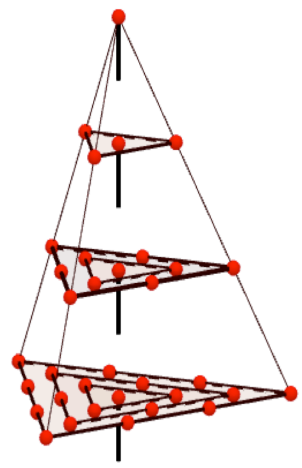
# Deuxième épreuve

De 15 heures10 à 17 heures 10

## Exercice 1 (à traiter par tous les candidats)
## Philuménistie

François Pignon, grand philuméniste (collectionneur d'allumettes) et maquettiste en allumettes décide de créer des constructions planes qu'il empilera pour construire une pyramide.

Pour la réalisation de ses constructions, il souhaite connaître à l'avance le nombre nécessaire d'allumettes.



Le projet de pyramide

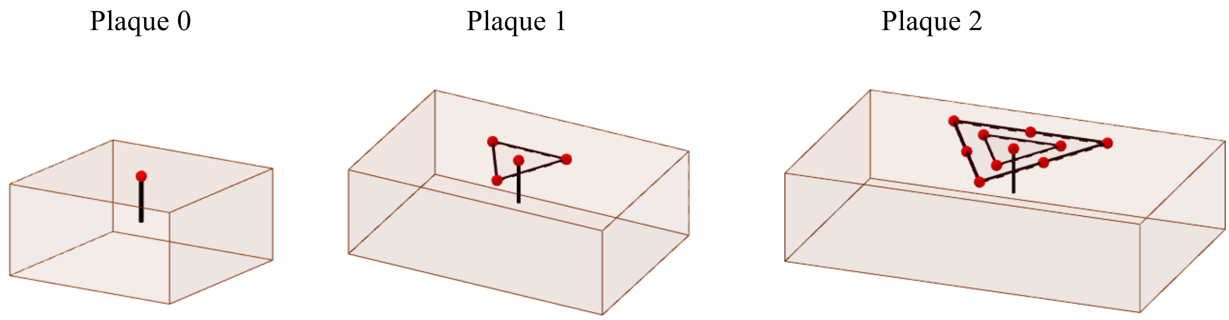
### Partie A – Constructions planes triangulaires

Sur des plaques de plexiglas transparent de même épaisseur, il colle des allumettes pour construire une série de figures planes, qui seront les éléments de base de sa construction en 3D.

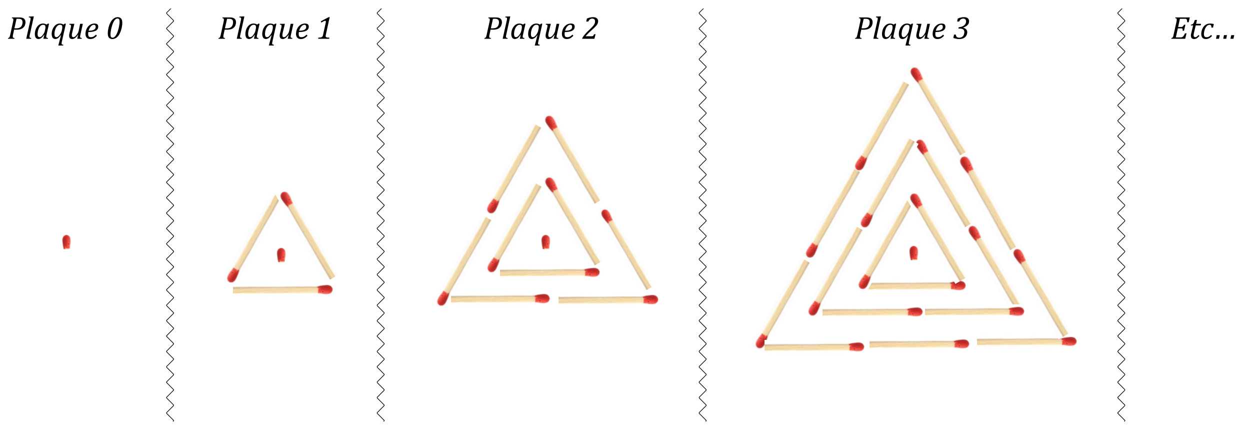
Sur la plaque 0, il perce un trou vertical afin d'y enfoncer une allumette entière dont la tête affleure.

Puis sur la plaque 1, il reproduit la même opération et colle 3 allumettes de façon à former un triangle équilatéral centré sur l'allumette enfoncée dans la plaque, comme le montre la figure.

Pour chaque nouvelle plaque, il reproduit la plaque précédente et y colle un triangle équilatéral supplémentaire, de même centre, aux côtés parallèles à ceux du triangle précédent, en utilisant à chaque fois une allumette de plus sur chacun des côtés comme suit :




Les mêmes plaques vues de dessus :




Pour tout entier $n \geq 0$, on note $T_n$ le nombre total d'allumettes utilisées pour réaliser la plaque $n$.
$T_n$ est appelé « $\boldsymbol{n}^{\text{ème}}$ **nombre triangulaire centré ».** En particulier, on a les égalités :
$T_0 = 1$ ; $T_1 = 4$ ; $T_2 = 10$.

**1)** De plaque en plaque…

**a)** Déterminer la valeur de $T_3$.

**b)** Compléter la figure donnée en Annexe permettant de représenter la construction de la plaque 4 et déterminer alors la valeur de $T_4$.

**c)** Pour tout entier $n \geq 1$, exprimer $T_n$ en fonction de $T_{n-1}$.

**2)** On considère l'algorithme suivant en langage naturel et sa programmation en Python

**Algorithme en langage naturel**

```
1  Algorithme ALGO1
2  Fonction NTC( k : entier naturel ) :
3  Début
4      L ⟵ []
5      T ⟵ 1
6      Pour i Variant de 0 à k Faire
7          T ⟵ T + 3 × i
8          Ajouter T à la liste L
9      Fin du Pour
10     Retourner L
11 Fin
```

**Programme en Python**

```python
1 import math
2 #######ALGO1#########
3 def NTC(k):
4     L=[]
5     T=1
6     for i in range(k):
7         T=T+3*i
8         L.append(T)
9     return(L)
```

**a)** Interpréter les instructions des lignes 6 à 9 de l'algorithme.

**b)** Que renvoie l'algorithme si on l'exécute en prenant pour argument de la fonction NTC l'entier $k = 5$ ?

**c)** Compléter le tableau donné en Annexe : <u>on s'arrêtera à la plus petite valeur</u> de $T_n$ permettant de répondre aux deux questions suivantes.

(i) Déterminer la plus petite valeur de $n$ pour laquelle $T_n$ se termine par 3 chiffres identiques.

(ii) 2021 est-il la somme de deux nombres triangulaires centrés ?

**3)** On admet que, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

**a)** Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $T_n$ en fonction de $S_n$.

**b)** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $T_n = \frac{3n^2+3n+2}{2}$.

**c)** Combien François Pignon doit-il prévoir d'allumettes pour réaliser la plaque 100 ?

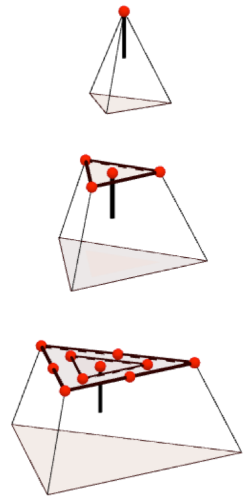
## Partie B – Construction pyramidale en 3D

Afin de réaliser une pyramide de plexiglas incrustée d'allumettes, François Pignon découpe chacune de ses plaques, comme le montre les dessins en perspective ci-dessous. Puis il empile ses plaques, de la plus grande en bas aux plus petites (les Plaque 2, Plaque 1 et Plaque 0*)* en haut, pour obtenir la pyramide présentée en première page.

Soit $n$ un entier naturel, pour une pyramide constituée des plaques 0 à $n$, on note $P_n$ le nombre total d'allumettes utilisées.

On appelle $P_n$ le « $\boldsymbol{n}^{\text{ème}}$ **nombre pyramidal** ». On a alors : $P_n = T_0 + T_1 + \cdots + T_n$

**Les plaques 0, 1 et 2 retaillées**



Pour l'aider à prévoir le stock d'allumettes nécessaires, deux amis, Juste Leblanc et sa sœur Marlène Hatorré, se proposent de l'aider à trouver une méthode permettant de calculer $P_n$ en fonction de $n$.

- Leblanc commence par calculer à la main les valeurs de $P_0, P_1, P_2$ et $P_3$ et conjecture que

  **si $\boldsymbol{n}$ est impair alors $\boldsymbol{P_n = \frac{29n-19}{2}}$**

  **et si $\boldsymbol{n}$ est pair alors $\boldsymbol{P_n = 7n + 1}$.**

- Marlène conjecture, de son côté, que pour tout $n$ entier naturel :

  $$\boldsymbol{P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{2} + n + 1.}$$

**1) Etude de la conjecture de Leblanc.**

**a)** Les calculs effectués par Leblanc jusqu'au rang $n = 3$ sont-ils conformes avec sa conjecture ? Détailler la réponse.

**b)** Concernant la validité de sa conjecture, François Pignon peut-il dire :

« C'est juste, Leblanc. » ?

**2) Etude de la conjecture de Marlène.**

On admet que, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$C_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**a)** Les calculs effectués par Marlène jusqu'au rang $n = 3$ sont-ils conformes avec sa conjecture ? Détailler la réponse.

**b)** Pour tout entier naturel $n$ non nul, exprimer $P_n$ en fonction de $S_n$ et $C_n$.

**c)** En utilisant les résultats des questions précédentes, démontrer que, pour tout entier naturel $n$, on a l'égalité : $P_n = \frac{(n+1)(n^2+2n+2)}{2}$

**d)** Concernant la validité de sa conjecture, François Pignon peut-il dire :

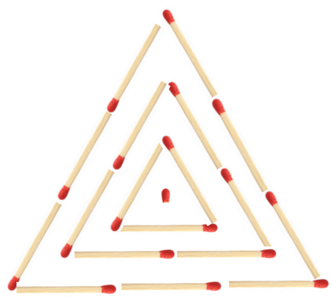
« Marlène Hatorré a raison. » ?

**3)** Combien François Pignon doit-il prévoir d'allumettes pour une pyramide constituée des plaques 0 à 100 ?

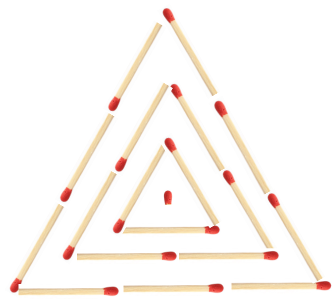
# ANNEXE

**Partie A 1) b)**

Plaque 3



Plaque 4 à compléter



**Partie A 2) c)** Compléter le tableau suivant :

On s'arrêtera à la première valeur de $T_n$ suffisante pour répondre aux questions 2)c) (i) et 2)c) (ii)

| $T_1$ | $T_2$ | $T_3$ | $T_4$ | $T_5$ | $T_6$ | $T_7$ | $T_8$ | $T_9$ | $T_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 10 | 19 | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| $T_{11}$ | $T_{12}$ | $T_{13}$ | $T_{14}$ | $T_{15}$ | $T_{16}$ | $T_{17}$ | $T_{18}$ | $T_{19}$ | $T_{20}$ |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| $T_{21}$ | $T_{22}$ | $T_{23}$ | $T_{24}$ | $T_{25}$ | $T_{26}$ | $T_{27}$ | $T_{28}$ | $T_{29}$ | $T_{30}$ |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| $T_{31}$ | $T_{32}$ | $T_{33}$ | $T_{34}$ | $T_{35}$ | $T_{36}$ | $T_{37}$ | $T_{38}$ | $T_{39}$ | $T_{40}$ |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| $T_{41}$ | $T_{42}$ | $T_{43}$ | $T_{44}$ | $T_{45}$ | $T_{46}$ | $T_{47}$ | $T_{48}$ | $T_{49}$ | $T_{50}$ |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| $T_{51}$ | $T_{52}$ | $T_{53}$ | $T_{54}$ | $T_{55}$ | $T_{56}$ | $T_{57}$ | $T_{58}$ | $T_{59}$ | $T_{60}$ |
| | | | | | | | | | |

# Phil-harmonie

Pour $n$ entier naturel non nul, on note :

$D(n)$ l'ensemble des diviseurs de $n$ ;

$ND(n)$ le nombre des diviseurs de $n$ ;

$SD(n)$ la somme des diviseurs de $n$ ;

$SID(n)$ la somme des inverses des diviseurs de $n$.

Par exemple : $D(6) = \{1\,;2\,;3\,;6\}$

$ND(6) = 4$

$SD(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$

$SID(6) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 2.$

## Partie A : Moyenne harmonique et division harmonique

1) Définition 1 : Soient $a_1, a_2, \dots, a_k$ des entiers naturels non nuls, la moyenne harmonique de ces nombres, notée $MH(a_1; a_2;\ \dots;\ a_k)$ est l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses des nombres : $$MH(a_1;\ a_2;\ \dots;\ a_k) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}}{k}} = \frac{k}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}}$$

   Définition 2 : Soit $n$ un entier naturel non nul. On dit que $n$ est en division harmonique lorsque la moyenne harmonique de ses diviseurs est un entier naturel.

   a. Déterminer la moyenne harmonique des nombres 1 , 2 , 3 et 6.
   b. 6 est-il en division harmonique ?
   c. Justifier que $n$ est en division harmonique lorsque $\frac{ND(n)}{SID(n)}$ est entier.

2) Soit $n$ un entier naturel non nul.

   a. Pour $n = 25$ et $n = 35$, justifier que $n \times SID(n) = SD(n)$.
   b. Pour $n$ entier naturel non nul, justifier que $n \times SID(n) = SD\ (n)$.
   c. En déduire que $n$ est en division harmonique lorsque $\frac{n \times ND(n)}{SD(n)}$ est entier
   d. 28 et 32 sont-ils en division harmonique ?

## Partie B : D'autres exemples

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose :

$$p_n = 2^{n+1} - 1 \qquad \text{et} \qquad q_n = 2^n \times p_n$$

1) Déterminer, pour $n$ allant de 1 à 5, si $p_n$ est un nombre premier.
2) Déterminer, pour $n$ allant de 1 à 5, si $q_n$ est en division harmonique.
3) Emettre une conjecture en comparant les réponses aux deux dernières questions.

## Partie C : Une preuve

Supposons que, pour l'entier naturel $n$ non nul, $p_n = 2^{n+1} - 1$ est premier.

1) Déterminer $D(p_n)$ puis $D(q_n)$.
2) Justifier que, pour $n$ entier naturel non nul : $1 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
3) Justifier que, si $p_n$ est premier, alors $q_n$ est en division harmonique.