Exercice 3 : Philuménistie

1) De plaque en plaque…

a) $T_3 = 19$

b) Voir l'annexe. On obtient : $T_4 = 31$.

c) Pour tout entier $n \geq 1$, $T_n = T_{n-1} + 3 \times n$

Algorithme en langage naturel

```
Algorithme ALGO1
Fonction NTC( k : entier naturel ) :
Début
    L ⟵ []
    T ⟵ 1
    Pour i Variant de 0 à k Faire
        T ⟵ T + 3 × i
        Ajouter T à la liste L
    Fin du Pour
    Retourner L
Fin
```

Programme en Python

```python
from math import*
##########ALGO1##########
def NTC(k):
    L=[]
    T=1
    for i in range(k):
        T=T+3*i
        L.append(T)
    return(L)
```

2) On considère l'algorithme suivant en langage naturel et sa programmation en Python

a) Ces lignes génèrent la liste des valeurs de T_n pour$n \in [0;\ k]$

b) Si $k = 5$, l'algorithme renvoie la liste [1, 4, 10, 19, 31]

c) $n = 36$ (Voir annexe)

(i) $T_{36} = 1999$ est le premier T_n se terminant par 3 chiffres identiques.

(ii) $T_{12} + T_{34} = 235 + 1786 = 2021$.

3) On admet que, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

a) Pour tout entier $n \geq 1$, $T_n = T_{n-1} + 3 \times n$ donc

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = T_0 + 3 \times 1 \\ T_2 = T_1 + 3 \times 2 \\ T_3 = T_2 + 3 \times 3 \\ \ldots \\ T_n = T_{n-1} + 3n \end{array}\right\} Donc\ T_n = T_0 + 3 \times S_n = 1 + 3S_n$$

b) On a donc $T_n = 1 + 3 \times \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{3n^2 + 3n + 2}{2}$.

c) Pour réaliser la plaque 100, il lui faut donc prévoir $T_{100} = 15151$ allumettes.

Partie B – Construction pyramidale en 3D

1) Etude de la conjecture de Leblanc.

a)
$$\left.\begin{array}{l} P_0 = 1 = 7\times 0 + 1 \\ P_1 = 1 + 4 = 5 = \frac{29\times 1 - 19}{2} \\ P_2 = 1 + 4 + 10 = 15 = 7\times 2 + 1 \\ P_3 = 1 + 4 + 10 + 19 = 34 = \frac{29\times 3 - 19}{2} \end{array}\right\}$$
Donc la conjecture est correcte jusque là …

b)
$$\left.\begin{array}{l} P_4 = 1+4+10+19+31 = 65 \\ \text{et } 7\times 4 + 1 = 29 \\ P_5 = 1+4+10+19+31+46 = 111 \\ \text{et } \dfrac{29\times 5 - 19}{2} = 63 \end{array}\right\}$$
Donc François Pignon ne peut dire :« C'est juste, Leblanc. »

2) Etude de la conjecture de Marlène.

On admet que, pour tout n entier naturel non nul :

$$C_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a)
$$\left.\begin{array}{l} P_0 = 1 = \frac{0*1*2}{2} + 0 + 1 \\ P_1 = 1 + 4 = 5 = \frac{1*2*3}{2} + 1 + 1 \\ P_2 = 1 + 4 + 10 = 15 = \frac{2*3*4}{2} + 2 + 1 \\ P_3 = 1 + 4 + 10 + 19 = 34 = \frac{3*4*5}{2} + 3 + 1 \end{array}\right\}$$
Donc la conjecture est correcte jusque là….

b) D'après la partie A 3)b), on a $T_n = \dfrac{3n^2+3n+2}{2}$ donc $P_n = \dfrac{3}{2}(1^2+2^2+\ldots+n^2) + \dfrac{3}{2}(1+2+\ldots+n) + n + 1$.

Donc $P_n = \dfrac{3}{2}C_n + \dfrac{3}{2}S_n + n + 1$.

c) On a : $P_n = \dfrac{3}{2}C_n + \dfrac{3}{2}S_n + n + 1$ donc $P_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{4} + \dfrac{3n(n+1)}{4} + n + 1$.

Après factorisation par $(n+1)$, on obtient : $P_n = \dfrac{(n+1)\left((2n^2+n)+3n+4\right)}{4} = \dfrac{(n+1)\left(n^2+2n+2\right)}{2}$.

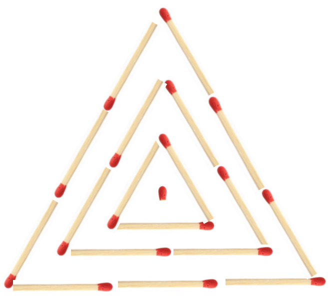
d) François Pignon peut donc affirmer que « Marlène Hatorré a raison. »

3) François Pignon doit prévoir $P_{100} = 515\ 201$ allumettes pour une pyramide constituée des plaques 0 à 100.

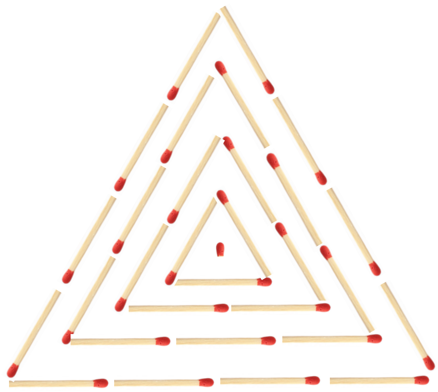
ANNEXE

Partie A 1) b)

Plaque 3



Plaque 4 à compléter



Partie A 2) c)

Compléter le tableau suivant :

On s'arrêtera à la première valeur de T_n suffisante pour répondre aux questions 2)c) (i) et 2)c) (ii)

T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
4	10	19	31	46	64	85	109	136	166
T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{17}	T_{18}	T_{19}	T_{20}
199	235	274	316	361	409	460	514	571	631
T_{21}	T_{22}	T_{23}	T_{24}	T_{25}	T_{26}	T_{27}	T_{28}	T_{29}	T_{30}
694	760	829	901	976	1054	1135	1219	1306	1396
T_{31}	T_{32}	T_{33}	T_{34}	T_{35}	T_{36}	T_{37}	T_{38}	T_{39}	T_{40}
1489	1585	1684	1786	1891	1999				
T_{41}	T_{42}	T_{43}	T_{44}	T_{45}	T_{46}	T_{47}	T_{48}	T_{49}	T_{50}
T_{51}	T_{52}	T_{53}	T_{54}	T_{55}	T_{56}	T_{57}	T_{58}	T_{59}	T_{60}