Pour aller plus loin : Exercices autour de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Charles Suquet

Exercice 1. *Un modèle simple pour le mélange de deux gaz*

Un récipient hermétique de 2 litres est séparé en deux parties symétriques « gauche » et « droite » par une cloison hermétique munie d'une vanne à large ouverture. La vanne étant fermée, la partie gauche du récipient contient au départ 1 litre d'oxygène et sa partie droite 1 litre d'azote chacun à l'état gazeux. On ouvre la vanne de la cloison intermédiaire et on laisse s'effectuer le mélange, puis au bout d'un temps suffisant on ferme la vanne. On mesure alors la proportion d'azote et d'oxygène dans la partie gauche et on constate *expérimentalement* qu'elles sont égales. Le but de cet exercice est l'étude d'un modèle simple permettant de prévoir ce phénomène.

Les molécules étant agitées d'un mouvement incessant, on suppose qu'après fermeture de la vanne, chaque molécule a une probabilité $1/2$ de se trouver dans la partie gauche du récipient. On dispose de n molécules d'oxygène et n d'azote. On indexe les molécules d'oxygène de 1 à n et celles d'azote de $n+1$ à $2n$. On note X_i la variable de Bernoulli prenant la valeur 1 si la i-ème molécule se trouve dans la partie gauche après fermeture de la vanne et la valeur zéro sinon. On suppose les X_i *indépendantes*. On pose : $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $T_n = X_{n+1} + \cdots + X_{2n}$. Ainsi après fermeture, le mélange gazeux dans la partie gauche est constitué de S_n molécules d'oxygène et T_n molécules d'azote.

1) Quelle est la loi exacte de S_n, son espérance et sa variance (en fonction de n) ? On a clairement les mêmes résultats pour T_n.

2) Soit $t > 0$ un nombre fixé. On considère l'événement

$$A = \left\{ \frac{n}{2} - \frac{t}{2}\sqrt{n} \leqslant S_n \leqslant \frac{n}{2} + \frac{t}{2}\sqrt{n} \right\}.$$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, minorer $P(A)$ en fonction de t. On a bien sûr le même résultat pour $P(B)$, avec

$$B = \left\{ \frac{n}{2} - \frac{t}{2}\sqrt{n} \leqslant T_n \leqslant \frac{n}{2} + \frac{t}{2}\sqrt{n} \right\}.$$

Application numérique : $n = 10^{22}$, $t = 10$, puis $t = 100$, $t = 1\,000$. Commentaire ?

3) On suppose désormais que $n - t\sqrt{n} > 0$. On s'intéresse à l'événement

$$C = \left\{ \frac{n - t\sqrt{n}}{n + t\sqrt{n}} \leqslant \frac{T_n}{S_n} \leqslant \frac{n + t\sqrt{n}}{n - t\sqrt{n}} \right\}.$$

Montrer que $A \cap B \subset C$.

4) Proposer une majoration de $P(A^c \cup B^c)$. En déduire une *minoration* de $P(C)$. Que peut-on dire de l'encadrement de T_n/S_n pour $n = 10^{22}$, $t = 10$, $t = 100$, $t = 1\,000$?

Exercice 2. *Campagne d'abonnements*

Un hebdomadaire lance une campagne d'abonnement en envoyant par la poste n lettres proposant trois types d'abonnement : 1 an pour 200 €, 2 ans pour 360 € et 3 ans pour 500 €. Les campagnes précédentes permettent de savoir que les probabilités p_i qu'une personne ainsi sollicitée s'abonne pour i années sont : $p_1 = 0{,}09$, $p_2 = 0{,}04$ et $p_3 = 0{,}02$. On admet que les différentes personnes sollicitées ont des comportements mutuellement indépendants.

1) Quelle est la probabilité qu'une personne sollicitée ne réponde pas ? Quelle est la loi du nombre S_n de lettres sans réponse ? Donner $\mathbf{E}S_n$ et $\operatorname{Var} S_n$.

2) L'éditeur se demande quel nombre minimal de lettres il doit envoyer pour qu'avec une probabilité d'au moins 0,95, le pourcentage de lettres sans réponses reste *au dessous* de 90%. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev proposez lui une solution.

3) Pour $i = 1, 2, 3$, donner la loi de Y_i nombre d'abonnements pour i années reçus à la fin de la campagne. Peut-on trouver un entier j tel que les évènements $\{Y_1 = j\}$ et $\{Y_2 = j\}$ *ne soient pas* indépendants ?

4) On note R_n la rentrée financière procurée par les abonnements. Que vaut $\mathbf{E}R_n$?

Exercice 3. *Compagnie d'assurance*

Une compagnie d'assurance a n clients qui versent chacun une « prime » (ou cotisation) annuelle a qui leur garantit le remboursement d'un sinistre au plus dans l'année. On note X_i le coût pour la compagnie du remboursement au bénéfice de l'assuré nº i dans l'année. L'évènement $\{X_i = 0\}$ traduisant l'absence de sinistre (ou de déclaration de sinistre) pour le client nº i a bien sûr une grande probabilité. On suppose que les X_i sont indépendantes, de même loi et que la compagnie bénéficie d'un grand nombre d'observations sur les années précédentes lui permettant de connaître avec une bonne précision l'espérance μ des X_i et leur variance σ^2 $(\sigma > 0)$. On note S_n la somme des X_i, montant total des remboursements à effectuer sur l'année. L'évènement $\{S_n > na\}$ traduit un déficit de la compagnie sur l'année. *Dans ce modèle, on oublie volontairement le total des frais non aléatoires F_n que la compagnie répercute sur les cotisations de ses clients (amortissement des locaux et du matériel possédés, loyers, impôts, salaires du personnel, dividendes versés aux actionnaires, frais de traitement des dossiers de sinistres et de recouvrement des cotisations, publicité, etc.). Une partie de ces frais est fixe, l'autre dépend du nombre n d'assurés. Si l'on tenait compte de ces frais, l'évènement « déficit sur l'année » s'écrirait $\{S_n + F_n > na\}$ au lieu de $\{S_n > na\}$. Après avoir fait l'exercice ci-dessous, on pourra reprendre l'étude en tenant compte de ces frais (cela revient à remplacer a par $a_n = a + F_n/n$) pour voir qu'il n'y a pas de changement qualitatif dans les résultats obtenus.*

1) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n > na) = \begin{cases} 1 & \text{si } a < \mu, \\ 0 & \text{si } a > \mu. \end{cases}$$

Ceci montre qu'il serait suicidaire pour la compagnie de demander à ses clients une prime inférieure à μ. Cette valeur μ est appelée « prime pure ». Soit M la valeur maximale que peut prendre X_i, fixée sous forme de plafond dans le contrat d'assurance. Théoriquement la compagnie n'aurait aucun risque de déficit en imposant une prime $a = M$ à ses assurés. Mais ce serait stupide car alors plus personne n'aurait intérêt à s'assurer (pourquoi ?).

2) Pour diverses raisons, la compagnie a intérêt à avoir un très grand nombre de clients. Ceci devrait l'amener en raison de la concurrence à minimiser la prime demandée. Néanmoins la valeur $a = \mu$ induit un risque de déficit trop élevé pour la compagnie [1]. Pour s'en convaincre, on propose une étude par simulation dans l'exemple simple suivant. La compagnie assure une flotte de $n = 500$ chalutiers. Le risque assuré est la perte totale du navire, donnant lieu à remboursement de 1 million d'euros. La probabilité de cet évènement pour un navire est estimée à 10^{-3}. La variable aléatoire X_i prend donc seulement pour valeurs 0 et 10^6. Donner sa loi et son espérance μ. Simuler N fois (disons $N = 100$) la valeur de S_n et compter le nombre de fois où $S_n > n\mu$.

3) Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes, de même loi, de variance σ^2 $(\sigma > 0)$. On note S_n la somme de ces n variables. Prouver l'inégalité suivante, valable pour tout réel $u > 0$:

$$P(S_n \geqslant n\mathbf{E}X_1 + u\sigma\sqrt{n}) \leqslant \frac{1}{u^2}.$$

4) En pratique la compagnie procède à un « chargement de la prime pure » consistant à demander une prime $a = \mu + c_n$ de façon à contrôler de manière acceptable pour elle le risque de déficit. En utilisant ce qui précède, quelle valeur minimale de c_n peut-elle proposer si elle veut maintenir la probabilité de déficit annuel en dessous de 1% ?

5) Dans un contexte de concurrence exacerbée, le conseil d'administration de la compagnie décide de financer le chargement de la prime à la place des clients en utilisant une partie des réserves de la compagnie et programme une campagne publicitaire annonçant une baisse correspondante des cotisations sur deux ans. Le plan financier prévoit un doublement du nombre des clients à la fin de la première année. De quel pourcentage faudra-t-il alors augmenter les réserves affectées au gel de la cotisation pour garder une probabilité de déficit en dessous de 1% ?

1. Le théorème limite central qui n'est pas au programme de Terminale permet de démontrer que $\lim_{n\to+\infty} P(S_n - n\mu > 0) = 1/2$.