Parcours probabilités au lycée

1 Pré-requis

1.1 Classe de première : variables aléatoires, simulations

- Variable aléatoire
  - fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$
  - loi, espérance, variance, écart-type
- Simulations
  - avec Python : variable aléatoire, moyenne d'un échantillon de taille n :

$$M_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

    échantillon : variables indépendantes identiquement distribuées
  - avec Python ou le tableur : étant donnés N échantillons de taille n, proportion des échantillons dont la moyenne est comprise entre $\mu - 2\sigma/\sqrt{n}$ et $\mu + 2\sigma/\sqrt{n}$

1.2 Classe terminale : somme de variables aléatoires

- Loi binomiale
  - vient après une leçon de dénombrement (avec coefficients binomiaux)
  - schéma de Bernoulli
  - expression $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$
  - utilisation d'algorithmes pour calculer des probabilités
- Somme de deux variables aléatoires
  - linéarité de l'espérance $E(aX + Y) = aE(X) + E(Y)$
    justification sur un exemple, comme proposé dans le programme
  - $V(aX) = a^2 V(X)$ et $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ dans le cas de variables indépendantes
  - échantillon de taille n : espérance et variance de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et de $M_n = \frac{S_n}{n}$, cas de la loi binomiale
  - questions flash : synthèse, avant d'aborder la leçon suivante

2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi des grands nombres

- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
  - Pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V :

$$\forall \delta > 0,\ P\left(|X - \mu| \geq \delta\right) \leq \frac{V}{\delta^2}$$

    démonstration à partir de $V(X) = \sum_k p_k (x_k - E(X))^2$
- Inégalité de concentration
  - échantillon de taille n :

$$\forall \delta > 0,\ P\left(\left|M_n - \mu\right| \geq \delta\right) \leq \frac{V}{n\delta^2}$$

  - définir une taille d'échantillon, en fonction de la précision et du risque choisi.
    exemple d'exercice
  - avec Python ou le tableur : proportion des échantillons pour lesquels l'écart entre M_n et μ est inférieur à $\sigma/\sqrt{n}$, $2\sigma/\sqrt{n}$, $3\sigma/\sqrt{n}$
  - non optimalité du théorème, bonnes valeurs de n et N, cas de la loi binomiale, lien avec le TCL et l'ancien programme de terminale
- Loi faible des grands nombres
  - $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|M_n - \mu\right| \geq \delta\right) = 0.$
    remarques historiques, différence et lien entre loi faible et loi forte, exemples d'applications