L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1 Les théorèmes

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V. Pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|X-\mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{\delta^2}.$$

Inégalité de concentration. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon de taille n d'une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.

On pose $M_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$. Alors pour tout $\delta > 0$:

$$P\left(|M_n-\mu| \geqslant \delta\right) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}.$$

2 Exercices

Exercice 1

On lance 3 600 fois un dé équilibré à six faces. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du chiffre 1 soit compris entre 480 et 720.

1. Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours des 3 600 lancers. Justifier que S suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la variance et l'espérance de S.
3. Justifier l'équivalence :
$$480 < S < 720 \iff |S-600| < 120$$
4. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, prouver que
$$P(|S-600| \geqslant 120) \leqslant 0{,}035$$
5. En déduire que la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3600 lancers est supérieure à 0,96.
6. En utilisant la loi de la variable aléatoire S, calculer numériquement la probabilité cherchée.

Exercice 2

On effectue une suite de lancers d'un dé à six faces. Quel est le nombre de lancers suffisant pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5 % que la fréquence d'apparition du 6 est comprise entre $\frac{1}{6} - 0{,}01$ et $\frac{1}{6} + 0{,}01$?

Notons S_n le nombre de 6 apparus au cours des n premiers lancers.

1. Quelle est la loi de S_n ? Son espérance ? Sa variance ?
2. Montrer que la question revient à trouver n de sorte que
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geqslant 0{,}01\right) \leqslant 0{,}05.$$
3. En déduire le nombre de lancers.

Exercice 3

Une élection oppose deux candidats A et B. On note p la proportion d'électeurs, dans la population totale, décidés à voter pour le candidat A.

On souhaite estimer cette proportion inconnue et effectuer un sondage (assimilé à un tirage avec remise) auprès de n personnes.

L'institut de sondage veut une fourchette de 1 % et un niveau de confiance de 95 %.

On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de personnes votant pour le candidat A et on souhaite quantifier le fait que $\frac{S_n}{n}$ approche p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.

1. Quelle est la loi de S_n ? Son espérance ? Sa variance ?
2. Démontrer que
$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geqslant 0{,}01\right) \leqslant \frac{1}{4n \times 10^{-4}}.$$
3. En déduire une condition sur n pour que $\frac{S_n}{n}$ soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95 %.