Le but de la séance est de démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dans le cas d'une variable aléatoire discrète à support fini.

Lissages : traiter les exercices suivants en respectant les priorités (+ : indispensable, puis ++)

Lissage	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
+ : indispensable ++ : confirmé	+	+	+	+	++

L_1 La loi de la variable aléatoire X est donnée dans le tableau ci-dessous :

Valeurs x_i de X	0	3	5	7	10
$p_i = P(X = x_i)$	0,05	0,1	0,2	0,6	0,05

Calculer $E(X)$.

L_2 Compléter le tableau ci-dessous et en déduire $V(X)$.

Valeurs x_i de X	0	3	5	7	10
$p_i = P(X = x_i)$	0,05	0,1	0,2	0,6	0,05
$\left(x_i - E(X)\right)^2$					

L_3 À l'aide du tableau, déterminer $P\left(\left(X - E(X)\right)^2 > 2{,}5^2\right)$.

L_4 Pour quelles valeurs de x, a-t-on $2x \leq 3x$?
Pour quelles valeurs de y, a-t-on $x + y \geq x$?
Pour quelles valeurs de k peut-on affirmer que $kx \geq y$ implique $x \geq \frac{y}{k}$?

L_5 Résoudre l'inéquation d'inconnue x : $(x - a)^2 > b^2$, avec b positif.

Montrons l’inégalité suivante :

Pour une variable aléatoire $\boldsymbol{X}$ d’espérance $\boldsymbol{\mu}$ et de variance $\boldsymbol{V}$, et, quel que soit le réel $\boldsymbol{\delta}$ strictement positif : $$\boldsymbol{P(\lvert X-\mu\rvert \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}}$$

Jeu du pourquoi :

1) On donne la loi de probabilité d’une variable aléatoire X, d’espérance μ et de variance V :

Valeurs x_i de X	x_1	x_2	…	x_n
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Je dis que $V = p_1(x_1-\mu)^2 + p_2(x_2-\mu)^2 + \cdots + p_n(x_n-\mu)^2$. Pourquoi ?

2) Soit $\delta > 0$. Soit I l’ensemble des entiers i tels que $(x_i-\mu)^2 \geq \delta^2$.
Je dis que
$$V \geq \sum_{i\in I} p_i(x_i-\mu)^2$$
Pourquoi ?

3) Je dis que
$$V \geq \sum_{i\in I} p_i\delta^2$$
Pourquoi ?

4) Je dis que
$$V \geq \delta^2\sum_{i\in I} p_i$$
Pourquoi ?

5) Je dis que
$$\sum_{i\in I} p_i = P((X-\mu)^2 \geq \delta^2)$$
Pourquoi ?

6) Je dis que
$$V \geq \delta^2 P((X-\mu)^2 \geq \delta^2)$$
Pourquoi ?

7) Je dis que
$$\frac{V}{\delta^2} \geq P((X-\mu)^2 \geq \delta^2)$$
Pourquoi ?

8) Je dis que
$$P((X-\mu)^2 \geq \delta^2) = P(\lvert X-\mu\rvert \geq \delta)$$
Pourquoi ?

9) Je dis que
$$P(\lvert X-\mu\rvert \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2}$$
Pourquoi ?

Applications

Exercice 1

On lance 3600 fois un dé équilibré.

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. On souhaite minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

1) Justifier que S suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2) Déterminer l'espérance et la variance de S.
3) Prouver que $480 < S < 720 \Leftrightarrow |S-600|<120$.
4) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P\left(|S-600| \geq 120\right) \leq 0,035$
5) En déduire que la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3600 lancers est supérieure à 0,96.
6) En utilisant la loi de la variable aléatoire S, calculer numériquement la probabilité $P(480 < S < 720)$.