Le but de la séance est de démontrer un résultat donnant la dérivée d'un produit

Prérequis :

● Soit f et g définies sur I, alors pout tout réel x de I, $(uv)(x) = u(x) \times v(x)$.

● Soit f une fonction définie sur I, soit $a \in$ I, soit h un réel strictement positif tel que $(a + h) \in$ I.
Si f est dérivable sur I, alors $f(a + h)$ tend vers $f(a)$ quand h tend vers 0.

Lissages : Traiter les exercices suivants en respectant les priorités (+ indispensable puis ++)

Lissages	L1	L2	L3	L4	L5
+=indispensable ++=confirmé	+	+	+	++	++

L1. Soit u et v les fonctions définies sur **R** par $u(x) = x - 1$ et $v(x) = 5 - 2x$.

Définir la fonction $u \times v$.

Calculer $(u \times v)(1)$

L2. Soit f une fonction définie sur I.

Soit h un réel strictement positif tel que $1+h$ appartienne à I.

Exprimer en fonction de h le taux de variation de f entre 1 et $1+h$.

L3. Soit g la fonction définie sur **R** par : $g(x) = -3x^2 + x$.

Sophie a trouvé que le taux de variation de g entre 1 et $1+h$ est : $-3h^2 - 5$.

Le professeur a validé.

En déduire $g'(1)$. Retrouver $g'(1)$ avec les formules de dérivation vues en classe.

L4. Soit $f(x) = x^3$. Donner $f'(x)$.

Ecrire f sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v à préciser.

Calculer $u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$. Que remarque- t-on ?

L5. Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Soit $h = 2 \times g$. Donner $h'(x)$.

Ecrire h sous la forme d'un produit de deux fonctions u et v à préciser.

Calculer $u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$. Que remarque- t-on ?

Montrons le théorème suivant :

Si *u* et *v* sont dérivables sur I alors *uv* est dérivable sur I et : **(*uv*)' = *u'v* + *uv'***

Jeu du pourquoi :

1) Soit $a \in$ I, et h un nombre réel strictement positif.
   Je dis que le taux de variation de la fonction uv entre a et $a + h$ est :
   $$\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$. Pourquoi ?
2) Je dis que ce taux est aussi égal à :
   $$\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$. Pourquoi ?
3) Je dis que ce taux est aussi égal à :
   $$\frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h)+u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$. Pourquoi ?
4) Je dis que quand h tend vers 0, $\frac{u(a+h)-u(a)}{h}$ tend vers $u'(a)$. Pourquoi ?
5) Je dis que quand h tend vers 0, $\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$ tend vers $v'(a)$. Pourquoi ?
6) Je dis que quand h tend vers 0, $v(a + h)$ tend vers $v(a)$. Pourquoi ?
7) Je dis que quand h tend vers 0, le taux de variation de la fonction uv entre a et $a + h$ est :
   $$u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$$
8) Je dis que : $\left(uv\right)'(a)=u'(a)v(a)+u(a)v'(a)$. Pourquoi ?
9) Cqfd. Pourquoi ?

Applications :

1) En utilisant cette formule, dériver la fonction f définie sur **R** par $f(x)=(5x-2)(x^2-3)$.
   Retrouver ce résultat à partir d'une expression développée de $f(x)$.
2) Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.
   En écrivant $g(x)$ sous la forme d'un produit, montrer que g est dérivable et que pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$: $g'(x)=\frac{-1}{2x\sqrt{x}}$
3) Soit u, v et w trois fonctions dérivables sur un intervalle I.
   Justifier que la fonction $u\times v\times w$ est dérivable sur I et que :
   Pour tout réel x de I, $(u\times v\times w)'(x)=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$.

4) Soit k la fonction définie sur **R** par : $k(x) = (2x - 1)e^x$.
   Justifier que k est dérivable sur **R** et déterminer une expression factorisée de $k'(x)$.